Geometria Fractal

Fractais são objetos em que cada parte é semelhante ao objeto como um todo. Isso significa que os padrões da figura inteira são repetidos em cada parte, só que numa escala de tamanho menor. O nome deriva do Latim fractus, que significa quebrado ou fraturado. Várias estruturas naturais são do tipo fractal e são igualmente complexas no detalhe e na forma global. A dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro, podendo ter dimensão fracionária. A maioria não se enquadra nas definições tradicionais, e gera dúvida em relação a comprimento, área e volume destas entidades matemáticas.

A Geometria Fractal expõe o traçado de formas irregulares e fragmentadas que a Geometria Euclidiana não apresenta. Por meio de procedimentos sistematizados e lógicos, esta geometria pode ser ensinada e divulgada com a finalidade de se conhecer uma nova construção geométrica e se ter um novo modo para representar e fazer uso em diferentes áreas do saber tais como matemática, arquitetura, artes e design. [1]

Fractais na África

Na África os fractais eram usados em símbolos religiosos, na decoração de tapetes, na construção de cercas e também no posicionamento das casas, como por exemplo na Vila africana de Logone Birni (figura 1), onde nota-se que a estrutura da vila é formada por um padrão consciente de repetição de retângulos em diferentes escalas, mapeando a escala social numa escala geométrica.

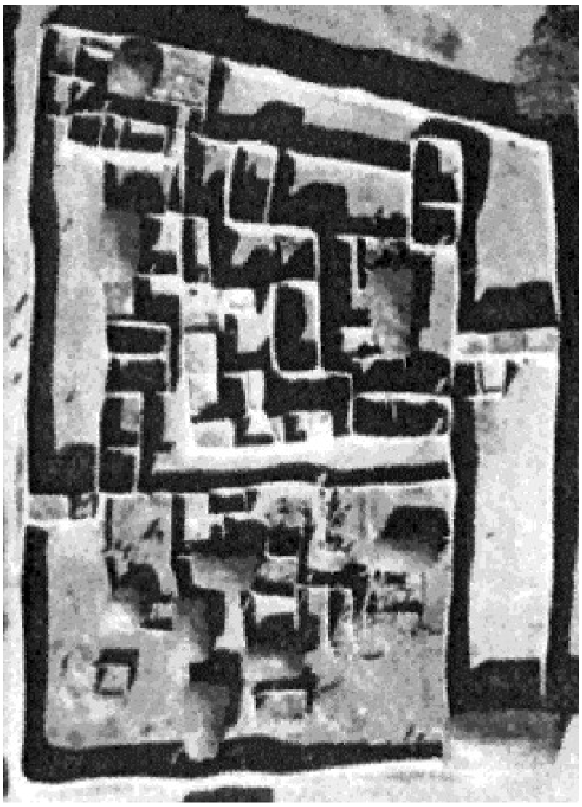

Figura 1: Vila africana de Logone Birni [2]

E o que torna ainda mais interessante, é que não é somente a estrutura externa da vila que é construída com base nos fractais, mas também a estrutura interna de uma construção, como pode ser observado na estrutura interna do palácio do Rei (figura 2), onde apresenta-se o mesmo padrão retangular de repetições, um retângulo dentro de outro retângulo, formando um caminho em espiral.

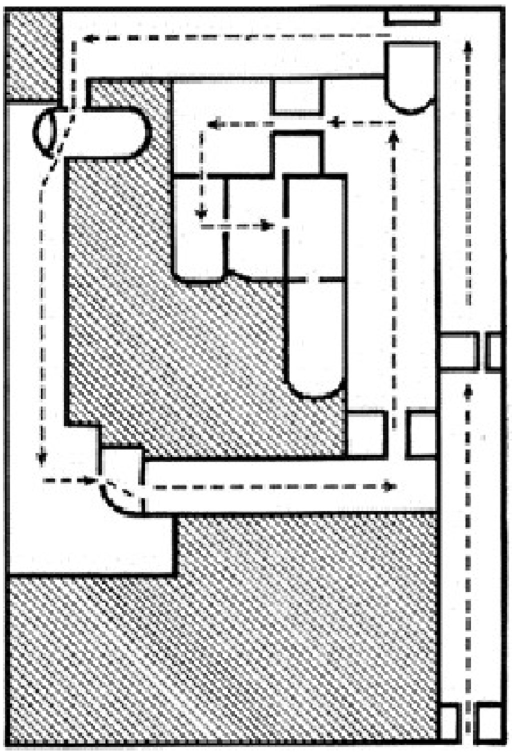

Figura 2: Palácio do Rei [2]

Propostas para o ensino da Geometria Fractal

A Geometria Fractal pode ser inserida no ensino do Desenho Geométrico estimulando os alunos a desenvolver formas não encontrada na Geometria Euclidiana. Métodos conhecidos podem ser demonstrados em exercícios iniciais. Após conhecer esta nova geometria e com a prática, figuras interessantes são desenhadas e empregadas em diferentes contextos, incluindo a matemática, abordada nessa reportagem.

Como referência, apresentamos a Curva de Koch, as remoções que criam o triângulo de Sierpinski e o fractal pentagonal de Dürer.

A Curva de Koch é desenvolvida a partir de um segmento de reta. Neste caso o segmento é dividido em partes iguais e inicia-se uma iteração em uma das partes divididas. Nota-se, na Figura 3, que o segmento sofre intervenção na parte central e o desenho é gerado tendo a intervenção como referência.

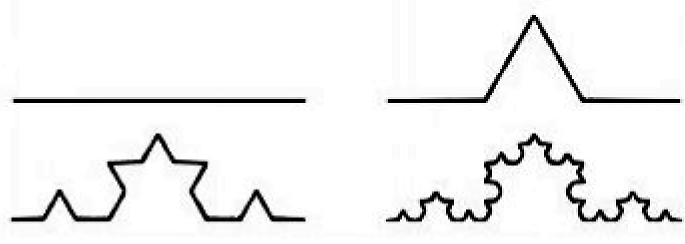

Figura 3: A Curva de Koch [1]

O triângulo de Sierpinski é formado com a remoção de partes da figura. Um triângulo eqüilátero é dividido em quatro triângulos menores e o triângulo central é removido. Na seqüência, os três triângulos resultantes são utilizados para preencher o espaço de um dos triângulos anteriores. A Figura 4 apresenta o processo.

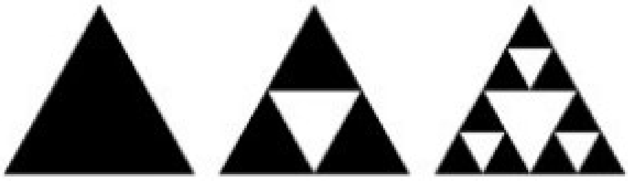

Figura 4: O Triângulo de Sierpinski [1]

Uma outra forma de compor um fractal é estabelecida na formação do fractal pentagonal de Dürer. Ao construir um pentágono regular, este poderá ser a base para a construção de outros cinco pentágonos regulares, como observado na Figura 5. As iterações são sucessivas, tomando-se como referência o nível anterior apresentado.

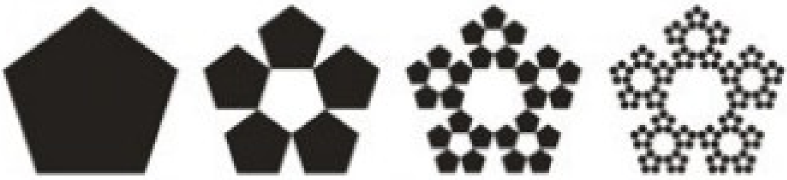

Figura 5: Fractal pentagonal de Dürer [1]

Ilha de Von Koch

O matemático sueco Helge Von Koch em 1904 foi o criador da curva de Von Koch que mais tarde originou a "Ilha de Von Koch"ou "Floco de neve de Koch". Ambas baseiam-se no mesmo processo de construção (um processo recursivo), porém a diferença é que a curva tem como figura inicial um segmento de reta e a ilha, um triângulo equilátero composto por três desses segmentos de reta.

Iniciamos o processo com um triângulo equilátero. Na primeira iteração da construção, dividimos cada lado do triângulo em três partes iguais e construímos sobre cada um dos segmentos do meio, um novo triângulo equilátero, sem a base, tal como podemos observar na figura 6. Obtivemos, portanto, a segunda figura do processo de construção (conhecida como "Estrela de Davi") com 12 lados. Repetimos o mesmo processo para cada um dos 12 segmentos obtidos na figura anterior [3].

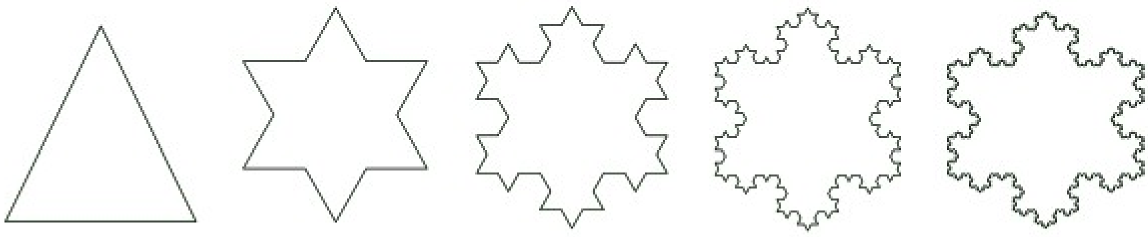

Figura 6: Iterações na ilha de Von Koch até a 4ª iteração [3]

Análise Matemática da Ilha de Von Koch

Ao analisarmos a figura 6, podemos observar que para cada nova iteração que se faz, a quantidade de lados anterior é aumentada 4 vezes, e o comprimento dos lados de cada nova figura são 3 vezes menores que os da figura anterior. Para analisarmos melhor essas informações observadas na figura 6, iremos montar uma tabela relacionando o número de iterações com o número de lados e o respectivo comprimento de cada um deles e tentaremos responder a seguinte pergunta: Qual o número de lados (L) e seus respectivos comprimentos (C) para a n-ésima iteração na Ilha de Von Koch? O que podemos dizer sobre o número de lados e o seu respectivo comprimento para um número muito grande de iterações?

Número de Iterações (n)	Número de Lados (L)	Comprimento dos Lados (C)
Figura Inicial	$3 = 3 \cdot 4^0$	$c_0 = c_0 \cdot 3^0$
1ª Iteração	$3 \cdot 4 = 12 = 3 \cdot 4^1$	$c_0 \frac{1}{3} = c_0 \cdot 3^{-1}$
2ª Iteração	$12 \cdot 4 = 48 = 3 \cdot 4^2$	$c_0 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = c_0 \frac{1}{9} = c_0 \cdot 3^{-2}$
3ª Iteração	$48 \cdot 4 = 192 = 3 \cdot 4^3$	$c_0 \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = c_0 \frac{1}{27} = c_0 \cdot 3^{-3}$
4ª Iteração	$192 \cdot 4 = 768 = 3 \cdot 4^4$	$c_0 \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} = c_0 \frac{1}{81} = c_0 \cdot 3^{-4}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
nª Iteração	?	?

Tabela 1: Número de lados do fractal "A Ilha de Von Koch"e seus respectivos comprimentos em função do número de iterações

Analisando a tabela 1, percebe-se que o número de lados trata-se de uma sequência númerica, onde o termo seguinte da sequência é o termo anterior multiplicado por 4, assim como os seus respectivos comprimentos de lado, que por sua vez, trata-se de uma sequência numérica onde o termo seguinte da sequência é o termo anterior multiplicado por $\frac{1}{3}$.

Podemos dizer então, que essas sequências numéricas tratam-se de Progressões Geométricas (PG), onde para o número de lados (L), temos o número de lados inicial $l_0 = 3$, razão $r = 4$ e o número de iterações dado por n (sendo $n \in \mathbb{Z}$), cuja PG ser definida tanto por recorrência como por uma fórmula geral:

$$L_n = l_{n-1} \cdot 4, \text{ com } n \geq 1$$
ou
$$L_n = l_0 \cdot 4^n, \text{ com } n \geq 0$$

Já para o comprimentos dos lados (C), supomos um comprimento inicial c_0 ($c_0 \in \mathbb{R}_+$), cuja razão da PG é $r = 3^{-1}$ e o número de iterações dado por n (sendo $n \in \mathbb{Z}$), podendo assim definir a PG, assim como para o número de lados, por recorrência ou por uma fórmula geral:

$$C_n = c_{n-1} \cdot 3^{-1}, \text{ com } n \geq 1$$
ou
$$C_n = c_0 \cdot 3^{-n}, \text{ com } n \geq 0$$

Tendo em base essa análise, podemos responder a pergunta feita anteriormente:

"Qual o número de lados (L) e seus respectivos comprimentos (C) para a n-ésima iteração na Ilha de Von Koch? O que podemos dizer sobre o número de lados e o seu respectivo comprimento para um número muito grande de iterações? "

R: *O número de lados obtidos na n-ésima iteração será* $L_n = 3 \cdot 4^n$*, e o seu respectivo comprimento* $C_n = c_0 \cdot 3^{-n}$*. Ao observar a fórmula geral que define o número de lados, observa-se que o mesmo trata-se de uma sequência crescente, onde quanto maior o número de iterações, maior será o número de lados obtidos. Relacionando a PG que define o número de lados com o conceito de limite, podemos dizer que para um número grande de iterações* $n \to \infty_+$*, o número de lados da Ilha de Von Koch tende a ser infinito também, podendo ser descrito da seguinte forma:*

$$\lim_{n \to \infty_+} L_n = +\infty$$

Já a PG que define o comprimento dos lados em função do número de iterações, trata-se de uma sequência decrescente, ou seja, quanto maior o número de iterações, menor será o comprimento dos lados. Assim como para o número de lados, podemos relacionar o comprimento dos lados com o conceito de limite, podendo assim dizer que para um número grande de iterações $n \to \infty_+$*, o comprimento dos lados da Ilha de Von Koch tende a 0, podendo ser descrito da seguinte forma:*

$$\lim_{n \to \infty_+} C_n = 0$$

Além disso, podemos extrapolar a questão proposta anteriormente e calcularmos o perímetro da Ilha de Von Koch em função do número de iterações.

O perímetro é dado pela soma dos comprimentos de todos os lados da Ilha de Von Koch, e como todos os lados possuem o mesmo comprimento, para obtermos o perímetro basta multiplicarmos o número de lados por seu respectivo comprimento, ambos em função do número de iterações.

$$P_n = L_n \cdot C_n = 3 \cdot 4^n \cdot c_0 \cdot 3^{-n} = 3 \cdot 4^n \cdot c_0 \cdot \tfrac{1}{3^n} = 3 \cdot c_0 \cdot (\tfrac{4}{3})^n$$

A PG que define o perímetro da Ilha de Von Koch em função do número de iterações (n) trata-se de uma sequência crescente, onde quanto maior o número de iterações, maior será o seu perímetro. Podemos então dizer que para um número muito grande de interações $n \to \infty_+$*, o perímetro da Ilha de Von Koch tende ao infinito, podendo ser descrito como:*

$$\lim_{n \to \infty_+} P_n = +\infty$$

Fiquem atentos no nosso site, na próxima reportagem sobre fractais continuaremos a analisar a Ilha de Von Koch.

Exercícios:

(ENEM - 2008) Fractal (do latim fractus, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.
O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:
1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

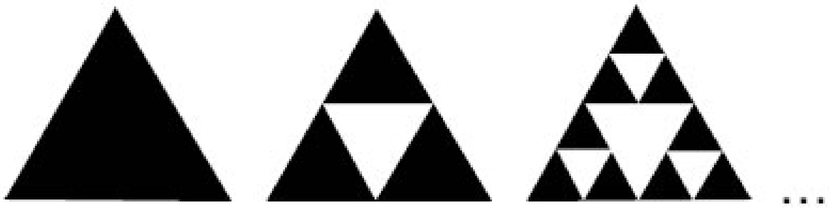

Figura 1 Figura 2 Figura 3

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da seqüência apresentada acima é:

A 

C 

E 

B 

D 

Resolução:

O triângulo de Sierpinski é formado com a remoção de partes da figura. Um triângulo equilátero é dividido em quatro triângulos menores e o triângulo central é removido. Na sequência, os triângulos restantes (em preto) são também divididos em quatro triângulo menores e o triângulo central é removido, e assim sucessivamente. Sendo assim, na figura 4, teríamos a remoção do triângulo central resultante da divisão de quatro partes dos triângulos em preto na figura 3, portanto, a alternativa correta seria a alternativa C.

Resposta: C.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] RINALDI, Ricardo Mendonça, MENEZES, Marizilda dos Santos. GEOMETRIA FRACTAL: UMA NOVA PROPOSTA PARAO ENSINO DO DESENHO GEOMÉTRICO. Departamento de Artes e Representação Gráfica - FAAC – Universidade Estadual Paulista, SP, 2007.

[2] Jovem Arquiteto. Ron Eglash e os fractais africanos. Disponível em: ⟨https://ojovemarquiteto.wordpress.com/2010/05/31/ron-eglash-e-os-fractais-africanos/⟩.

[3] CÔRTES, Ivana Resende da Costa. Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, RJ, 2014.