Fractais: uma perspectiva arquitetônica

A geometria fractal tem se tornado, nas duas últimas décadas, uma importante ferramenta de análise e proposição em inúmeros campos do conhecimento. Pelo fato de apresentar como resultado construções geométricas em que formas simples geram entes geométricos complexos, a geometria fractal representa e descreve fenômenos da natureza, tais como planetas, nuvens e costas geográficas, que a geometria tradicional euclidiana é incapaz de descrever [1].

Sendo assim, se a geometria fractal define formas aplicáveis ao nosso universo, ela também pode definir a forma de edificações e cidades inteiras, ou seja, descrever a morfologia urbana. Ao longo da história os fractais foram utilizados em construções "inconscientemente", inconscientemente no sentido que não havia ainda o conceito de geometria fractal propriamente dito, mas consciente no sentido de aplicação, transformando construções geométricas simples em construções geométricas mais complexas. Tal fato pode ser observado em algumas aldeias africanas, construídas por várias gerações, resultando na formação de um intrincado padrão fractal como um todo, muito antes da definição do conceito de geometria fractal na década de 70 do século XX.

A vila Ba-ila no sul da Zâmbia (figura 1) foi desenhada com enormes anéis. Cada extensão dos anéis, onde se formam os círculos são as casas de família. Perto do portão principal são os locais de armazenamento de pequeno porte, e movendo-se em torno do anel, os locais se tornam habitações progressivamente maiores, até a maior, a casa do chefe, em frente ao portão. Assim, de frente para trás as medidas gradientes equivalem ao status da casa. Na parte de trás da casa de cada família é o altar doméstico. É um anel de anéis em estado gradiente (figura 2).

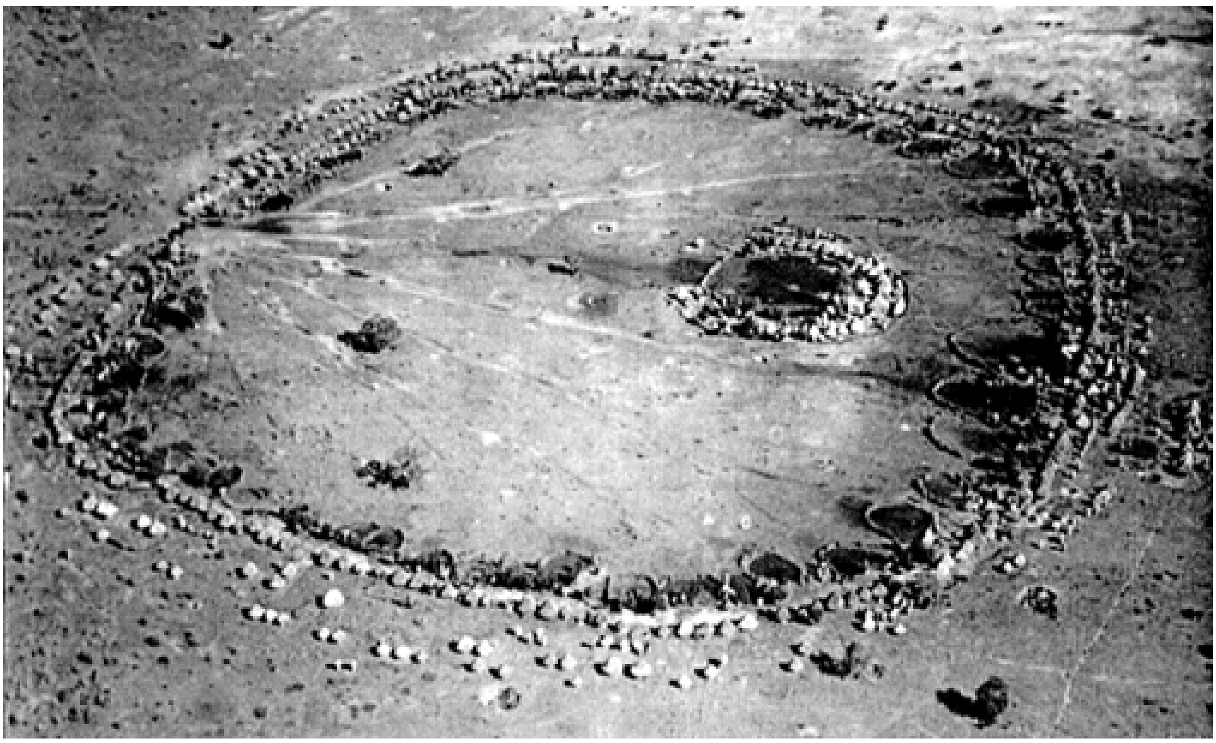


Figura 1: Vila Ba-ila [4]

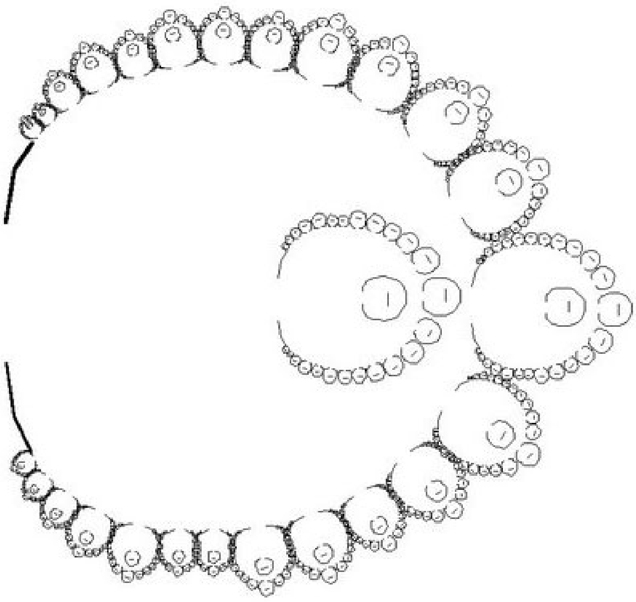


Figura 2: Padrão fractal da Vila Ba-ila [4]

A relação do chefe da tribo é descrita pela palavra “kulela”, uma palavra que se traduz como ”para governar”, embora esse seja seu significado secundário, tendo como principal significado “curandeiro e aquele que acalenta”. Ele é como o pai da comunidade, e essa relação é ecoada por todos e os laços espirituais em todas as escalas, e é estruturalmente mapeado através da arquitetura auto-similar [2].

Já a vila de Makoulek na região de camarões (figura 3), é construída com pequenos silos circulares e celeiros circulares maiores em espiral dentro de três grandes recintos de pedra, que fazem outro espiral a partir de um ponto central que é a parte quadrada.

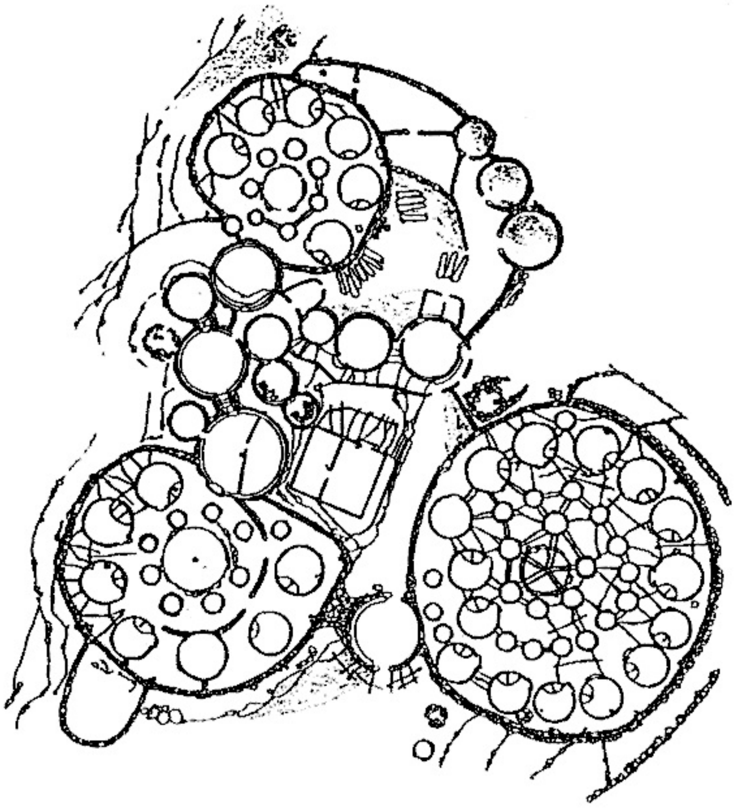


Figura 3: Vila de Makoulek [4]

Há um tipo de receita ou algoritmo que determina como o sistema expande para acomodar o crescimento. É determinada pelo conhecimento do rendimento agrícola. Esta medida do volume foi convertido em números de silos e estes foram arranjados em espirais. O design não é simplesmente uma questão de adicionar celeiros de forma aleatória, mas sim a expansão de um processo quantitativo e deliberada [2].

A Aldeia Nankani (figura 4) por sua vez, é construída por uma série fractal de cilindros. Aqui vemos apenas um composto, um cilindro de cilindros que ficam menores à medida que a construção segue no sentido anti-horário em torno do pátio central. Seu primeiro rito de passagem é desde o ventre da mãe para a sala de parto. A próxima passagem é rastejar para o pátio. A próxima é a partir do pátio para a aldeia como um todo, e, finalmente, a partir da aldeia para o mundo.

Além disso, cada mulher mantém uma pilha de tigelas em escala amarrados em sua cozinha, chamada de Zalanga (figura 5), com a menor tigela sendo o kumpio, um santuário para a sua alma. Quando ela morre, a Zalanga está quebrada e sua alma é liberado para a eternidade.

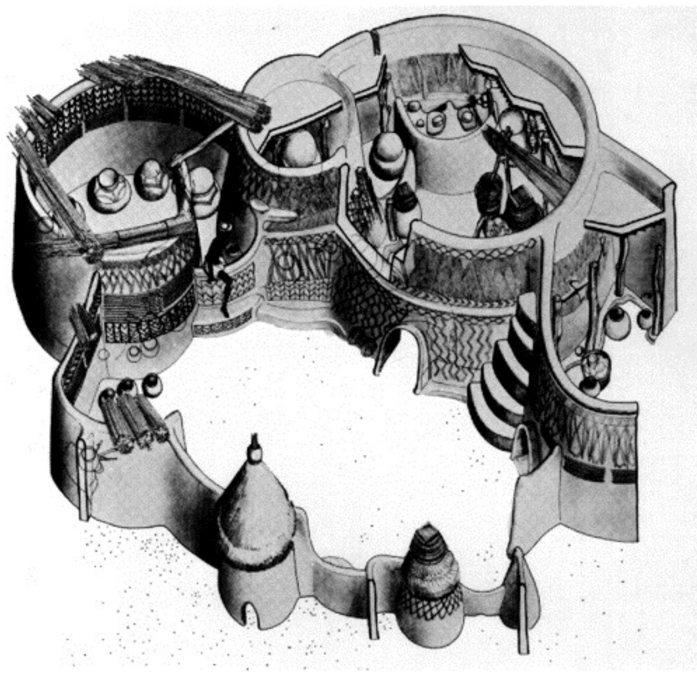


Figura 4: Aldeia Nankani [4]

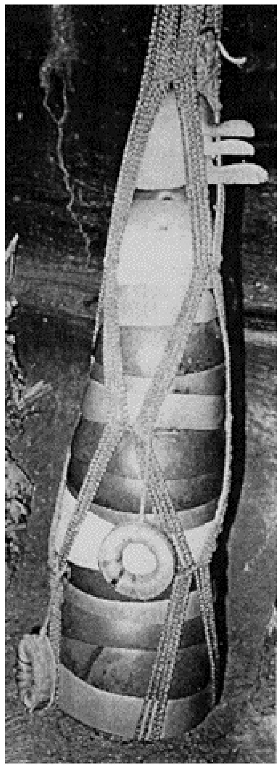


Figura 5: Zalanga [3]

De acordo com Ron Eglash, essas criações arquitetônicas com padrões fractais não são apenas inconscientes e intuitivas, mas também partes de recursos e descamação da terra que existe no sistema de conhecimento antigo indígena africano [3].

E se utilizássemos como base o fractal “A Ilha de Von Koch” para construção de uma vila ou cidade, onde cada iteração correspondesse ao acréscimo de novas casas, tornando-a uma cidade ou vila cada vez maior, seria possível determinar a área total aproximada da vila para um número muito grande de iterações?

Determinação da área da Ilha de Von Koch para n iterações

Na reportagem anterior sobre fractais, observamos como o número de lados da Ilha de Von Koch e os seus respectivos comprimentos variam em função do número de iterações, como mostra a tabela a seguir.

Número de Iterações (n)	Número de Lados (L)	Comprimento dos Lados (C)
Figura Inicial	$3 = 3 \cdot 4^0$	$c_0 = c_0 \cdot 3^0$
1ª Iteração	$3 \cdot 4 = 12 = 3 \cdot 4^1$	$c_0 \frac{1}{3} = c_0 \cdot 3^{-1}$
2ª Iteração	$12 \cdot 4 = 48 = 3 \cdot 4^2$	$c_0 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = c_0 \frac{1}{9} = c_0 \cdot 3^{-2}$
3ª Iteração	$48 \cdot 4 = 192 = 3 \cdot 4^3$	$c_0 \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = c_0 \frac{1}{27} = c_0 \cdot 3^{-3}$
4ª Iteração	$192 \cdot 4 = 768 = 3 \cdot 4^4$	$c_0 \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} = c_0 \frac{1}{81} = c_0 \cdot 3^{-4}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
nª Iteração	$L_n = l_0 \cdot 4^n$	$C_n = c_0 \cdot 3^{-n}$

Tabela 1: Número de lados do fractal "A Ilha de Von Koch"e seus respectivos comprimentos em função do número de iterações

Onde:
l_0 corresponde ao número de lados inicial da Ilha de Von Koch, $l_0 = 3$ (triângulo);
c_0 correponde ao comprimento inicial dos lados da Ilha de Von Koch. Como inicialmente o fractal é um triângulo equilátero, todos os lados possuem as mesmas medidas.

Inicialmente, iremos propor que a construção da vila parta de um aglomerado de casas que formam aproximadamente a figura de um triângulo equilátero, conforme a ilha de Von Koch (figura 6). Na primeira iteração, consideraremos que o número de casa acrescentados fazem com que a figura formada pelas construções se aproxime a forma da estrela de Davi, aumentando em 4 vezes o número de lados da construção inicial da vila. Já na segunda interação, o acréscimo de novas casas faz com que a figura formada aumente em 4 vezes o número de lados da figura anterior e em 16 vezes o número de lados da construção inicial. O processo recorrente para o acréscimo de casas a cada iteração, corresponde ao mesmo processo de construção do fractal a Ilha de Von Koch, onde o número de lados da figura aproximada da vila para n iterações corresponde a $L_n = 3 \cdot 4^n$ assim como os seus respectivos comprimentos correspondem a $C_n = c_0 \cdot 3^{-n}$.

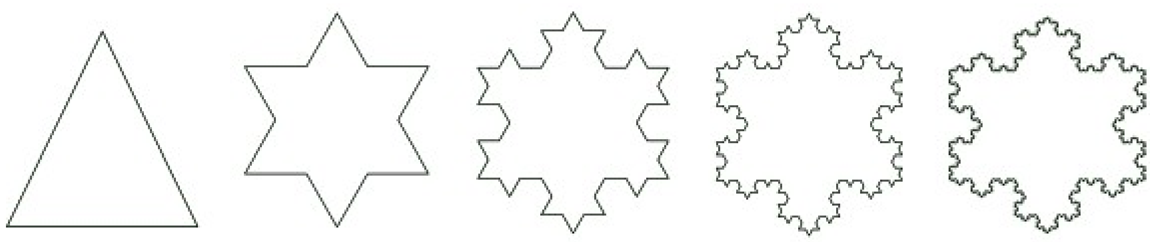


Figura 6: Iterações na ilha de Von Koch até a 4ª iteração [5]

Partindo do pressuposto que a construção da vila parta de um aglomerado de casas que formam aproximadamente a figura de um triângulo equilátero, para determinar a área inicial da construção da vila, devemos determinar a área de um triângulo equilátero (figura 7) para um comprimento de lado inicial c_0.

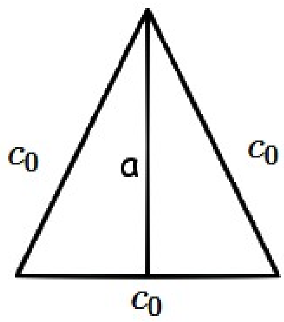


Figura 7: Triângulo equilátero de lado c_0

A área de um triângulo é dada por: $A = \frac{base \cdot altura}{2}$, mas como inicialmente desconhecemos a altura do triângulo formado pela construção inicial, é necessário determiná-la para que possamos fazer o cálculo de sua área.

Para determinação da altura utilizaremos o teorema de Pitágoras, que nos diz que para qualquer triângulo retângulo (triângulo que possui um ângulo de 90° - ângulo reto), o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Ou, seja para o nosso triângulo equilátero em questão, e conforme a figura 8, podemos atribuir a relação: $c_0^2 = a^2 + (\frac{c_0}{2})^2$, e assim determinar a altura "a" para que possamos determinar a área da construção inicial cuja figura é dada por um triângulo equilátero.

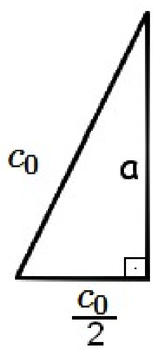


Figura 8: Triângulo retângulo formado a partir do triângulo equilátero inicial

Determinação da altura do triângulo equilátero:

$$c_0^2 = a^2 + (\tfrac{c_0}{2})^2$$

$$c_0^2 - (\tfrac{c_0}{2})^2 = a^2$$

$$c_0^2 - \tfrac{c_0^2}{4} = a^2$$

$$\tfrac{3 \cdot c_0^2}{4} = a^2$$

$$a = \sqrt{\frac{3 \cdot c_0^2}{4}}$$

$$a = \frac{c_0 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Sabendo a sua altura, podemos então determinar a área da construção inicial que é dada por $A = \frac{base \cdot altura}{2}$, sendo sua base $= c_0$ e sua altura $= a = \frac{c_0 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

$$A = \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$A = \frac{c_0 \cdot \frac{c_0 \cdot \sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A = \frac{c_0^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Ao observarmos mais atentamente as mudanças na ilha de Von Koch (figura 9) a cada iteração, notaremos que além das observações referente ao número de lados e seus respectivos comprimentos, podemos obter informações sobre o acréscimo de área a cada iteração. Ao dividirmos o triângulo equilátero inicial em 9 partes idênticas, é nítido que na primeira iteração ocorre o acréscimo de 1/9 da área inicial multiplicado pelo número de lados do polígono anterior, e portanto a área total para a primeira iteração seria a soma da área inicial mais o acréscimo de área decorrente da primeira iteração.

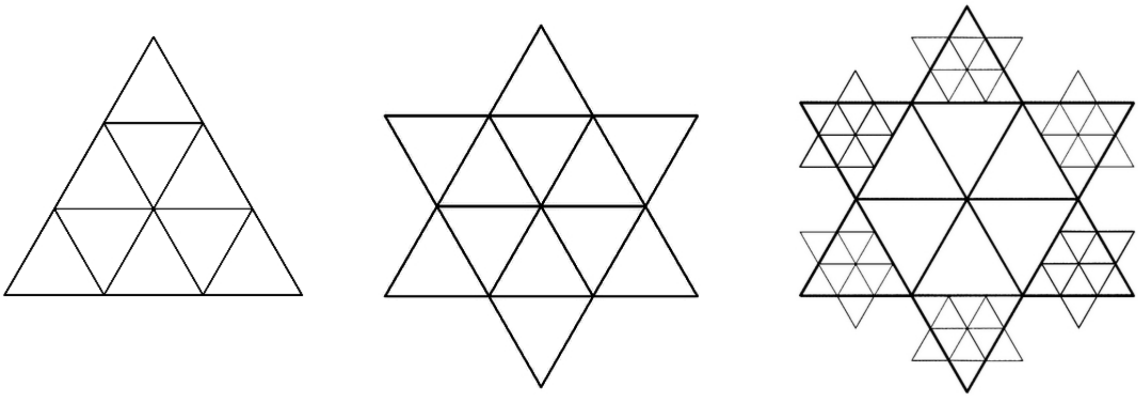


Figura 9: Iterações na ilha de Von Koch até a 2ª iteração

Continuando a análise, ao observarmos as divisões evidenciadas na figura 9 para a segunda iteração, podemos concluir que o acréscimo de área na segunda iteração é equivalente a 1/9 de uma das 9 partes do triângulo equilátero inicial multiplicada pelo número de lados do polígono atual, ou seja, o acrescimento de área para segunda iteração é equivalente à 1/81 da sua área inicial multiplicado pelo número de lados do polígono anterior, e portanto a área total para a segunda iteração seria a soma da área total da primeira iteração mais o acréscimo de área decorrente da segunda iteração, ou escrevendo de outra forma, poderíamos dizer que a área total para a segunda iteração seria dada pela soma da área inicial mais o acréscimo de área da primeira iteração mais o acréscimo de área da segunda iteração.

O processo ocorre sucessivamente, ou seja, a cada iteração o acréscimo de área é dado pela divisão sucessiva por 9 da área do polígono inicial multiplicada tantas vezes quantas forem o número de lados do polígono anterior, ou seja, a área total seria dada pela soma da área inicial mais o acréscimo de área dado por cada iteração até o número de iterações desejadas.

Esquematizando o acréscimo de área em função do número de iterações para construção da vila, podemos descrever da seguinte forma:

O número de lados conforme o número de iterações na Ilha da Von Koch é dado por $L_n = l_0 \cdot 4^n$ (onde n corresponde ao número de iterações), sendo assim, na construção inicial da nossa vila, cuja figura aproximada é dada por um triângulo equilátero e seu processo de construção/crescimento é dado pela construção do fractal "A Ilha de Von Koch", temos o número de lados igual a $l_0 = 3 \cdot 4^0$ e $A_0 = A = \frac{c_0^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Acréscimo de área para 1ª iteração

$l_1 = 3 \cdot 4^1$

$A_{1+} = l_0 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_0 = 3 \cdot 4^0 \cdot (\frac{1}{9})^1 \cdot A_0 = 3 \cdot 4^0 \cdot (\frac{1}{9})^0 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_0 = \frac{1}{3} \cdot A_0$

Acréscimo de área para 2ª iteração

$l_2 = 3 \cdot 4^2$

$A_{2+} = l_1 \cdot \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{9} \cdot A_0) = 3 \cdot 4^1 \cdot (\frac{1}{9})^2 \cdot A_0 = 3 \cdot 4^1 \cdot (\frac{1}{9})^1 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_0 = \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9})^1 \cdot A_0$

Acréscimo de área para 3ª iteração

$l_3 = 3 \cdot 4^3$

$A_{3+} = l_2 \cdot \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{9} \cdot A)) = 3 \cdot 4^2 \cdot (\frac{1}{9})^3 \cdot A_0 = 3 \cdot 4^2 \cdot (\frac{1}{9})^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_0 = \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9})^2 \cdot A_0$

Acréscimo de área para 4ª iteração

$l_4 = 3 \cdot 4^4$

$A_{4+} = l_3 \cdot \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{9} \cdot A))) = 3 \cdot 4^3 \cdot (\frac{1}{9})^4 \cdot A_0 = 3 \cdot 4^3 \cdot (\frac{1}{9})^3 \cdot \frac{1}{9} \cdot A_0 = \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9})^3 \cdot A_0$

.

.

Acréscimo de área para nª iteração

$A_{n+} = l_{n-1} \cdot (\frac{1}{9})^n \cdot A_0 = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot (\frac{1}{9})^n \cdot A_0 = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot (\frac{1}{9})^{n-1} \cdot \frac{1}{9} \cdot A_0 = \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9})^{n-1} \cdot A_0$

Sabemos que a área total da construção da vila cujo crescimento obedece a construção do fractal "A Ilha de Von Koch"seria dada pela soma da área inicial mais o acréscimo de área dado por cada iteração até a n-ésima iteração, e dessa forma poderíamos resolver a questão proposta anteriormente:

”E se utilizássemos como base o fractal “A Ilha de Von Koch” para construção de uma vila ou cidade, onde cada iteração correspondesse ao acréscimo de novas casas, tornando-a uma cidade ou vila cada vez maior, seria possível determinar a área total aproximada da vila para um número muito grande de iterações? ”

R: *Tendo em mente que a área total aproximada da vila para n iterações corresponde a soma da área inicial mais a somatória dos acréscimos de área a cada iteração (da 1ª até a n-ésima iteração), podemos equacionar a área total da seguinte forma:*

$$A_{TOTAL} = A_0 + A_{1+} + A_{2+} + A_{3+} + A_{4+} + ... + A_{n+}$$

Sendo $A_{1+} + ... + A_{n+}$ *correspondente a somatória dos acréscimos de área a cada iteração da 1ª até n-ésima iteração.*

Substituindo os acréscimos de área por seus respectivos valores em função da área inicial, podemos então desenvolver o cálculo da área total:

$$A_{TOTAL} = A_0 + \frac{1}{3} \cdot A_0 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9})^1 \cdot A_0 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9})^2 \cdot A_0 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9})^3 \cdot A_0 + \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{9})^{n-1} \cdot A_0$$

$$A_{TOTAL} = A_0 + \frac{1}{3} \cdot A_0 \cdot [1 + (\frac{4}{9})^1 + (\frac{4}{9})^2 + (\frac{4}{9})^3 + ... + (\frac{4}{9})^{n-1}]$$

$$A_{TOTAL} = A_0 + \frac{1}{3} \cdot A_0 \cdot S_n$$

Onde S_n *corresponde a soma dos n primeiros termos de uma PG, cujo primeiro termo é* $a_1 = 1$ *e sua razão* $r = \frac{4}{9}$ [5].

Chamaremos arbitriamente a progressão geométrica citada anteriormente de B, cuja fórmula geral é dada por $B_n = 1 \cdot (\frac{4}{9})^n$.

Ao analisarmos a PG acima que possui razão $r = \frac{4}{9}$, *devido ao fato do denominador da razão ser maior que seu numerador o que implica em r ¡ 1, e portanto é evidente que trata-se de uma sequência decrescente, ou seja, quanto maior o valor de n menor será o valor de* B_n *e por sua vez mais próximo de zero.*

Dizemos então que o limite $B_n = 1 \cdot (\frac{4}{9})^n$, *quando n tende ao infinito, vale zero:*

$$\lim_{n \to \infty_+} B_n = 0$$

Com base no resultado acima, podemos então calcular a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica ”B”, onde a soma dos n primeiros termos de uma PG é dada pela equação:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Mas sabemos que devido ao fato do denominador da razão ser maior que o numerador, conforme aumentamos o número de n, o termo r^n *tenderá a zero.*

$$\lim_{n \to \infty_+} r^n = 0$$

e portanto:

$$\lim_{n\to\infty_+} S_n = \frac{a_1\cdot(0-1)}{r-1} = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

Dessa forma, ao calcular a soma dos n primeiros termos da PG, sabemos que para um número muito grande de n o valor adicionado a somatória será muito próximo de zero, portanto a somatória possuirá um limite que pode ser descrito da seguinte forma.

$$\lim_{n\to\infty_+} S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

substituindo os valores correspondentes do primeiro termo a_1 e a razão r, temos:

$$\lim_{n\to\infty_+} S_n = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{9-4}{9}} = \frac{1}{\frac{5}{9}}$$

$$\lim_{n\to\infty_+} S_n = \frac{9}{5}$$

Ao calcularmos o valor de S_n, podemos então substituir o valor corresponde no cálculo da área total:

$$A_{TOTAL} = A_0 + \frac{1}{3}\cdot A_0 \cdot S_n$$

$$A_{TOTAL} = A_0 + \frac{1}{3}\cdot A_0 \cdot \frac{9}{5}$$

$$A_{TOTAL} = A_0 + \frac{3}{5}\cdot A_0$$

$$A_{TOTAL} = \frac{5+3}{5}\cdot A_0$$

$$A_{TOTAL} = \frac{8}{5}\cdot A_0$$

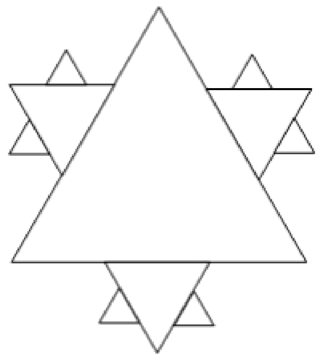
$$A_{TOTAL} = 1,6\cdot A_0$$

$$A_{TOTAL} = 1,6\cdot \frac{c_0^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

Podemos então dizer que a área total aproximada da vila cujo crescimento é dado pela construção do fractal "A Ilha de Von Koch"para um número muito grande de iterações, corresponde a 1,6 vezes a área inicial.

Exercícios:

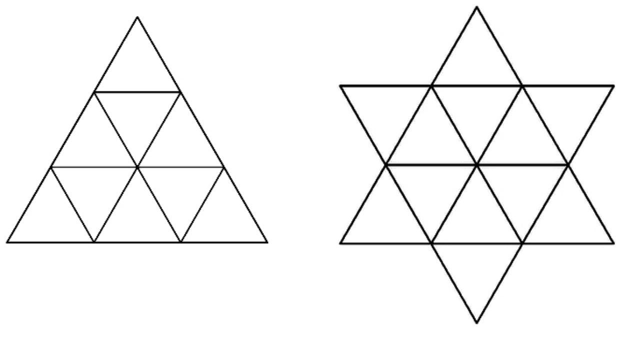
(UNICAMP - SP) Construir "fractais"no computador corresponde a um procedimento como o descrito a seguir. A partir de um triângulo equilátero, de área A, acrescentamos no meio de cada lado um outro triângulo equilátero de lado igual a um terço do anterior, aos lados livres destes triângulos acrescentamos triângulos de lados iguais a um terço dos anteriores e assim sucessivamente construímos uma figura com uma infinidade de triângulo (veja o desenho). Calcule a área, em termos de A, da região determinada por esse processo.



Resolução:

Analisando o desenho acima, podemos observar que ele muito se assemelha ao fractal "A Ilha de Von Koch", e o que os diferencia é que o acréscimo de triângulos equiláteros é feito somente nos lados livres dos triângulo acrescentados anteriormente, dessa forma, as extreminades inferiores direita e esquerda, assim como a extremidade superior não recebem o acréscimo de triângulos.

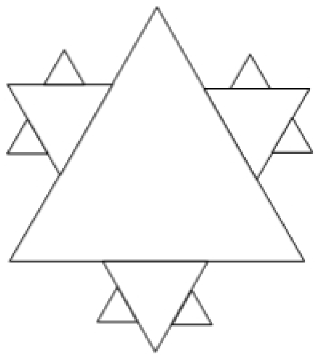
Inicialmente, o triângulo equilátero inicial possui área inicial A. Ao acrescentarmos no meio de cada lado um outro triângulo equilátero de lado igual a um terço do anterior. Obteremos a seguinte figura:



A área total correspondente a primeiro iteração que chamaremos de A_1, será a soma da área inicial mais o acréscimo de área dado pelo acréscimo dos triângulos equiláteros de lado igual a um terço do anterior, ou seja, ao dividirmos o triângulo equilátero inicial em 9 partes idênticas, é nítido que na primeira iteração ocorre o acréscimo de 1/9 da área inicial multiplicado pelo número de lados livres do polígono anterior, no caso 3.

$$A_1 = A + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot A = A + \frac{3}{9} \cdot A$$

Nos lados livres destes triângulos que foram acrescentados, acrescentamos triângulos de lados iguais a um terço dos anteriormente acrescentados, ou seja, o lado desses novos triângulos acrescentados correspondem a 1/9 do lado do triângulo inicial. E portanto, a área total correspondente a segunda iteração que chamaremos de A_2, será a soma A_1 mais o acréscimo de área dado pelo acréscimo dos triângulos equiláteros de lado igual a um terço do anteriormente acrescentado, cujo acréscimo de área equivale a 1/81 da área inicial multiplicado pelo número de lados livres desses triângulos, sendo dois lados livres para cada triângulo acrescentado, correspondendo ao total de 6 lados livres.



$$A_2 = A_1 + 6 \cdot \frac{1}{81} \cdot A = A + \frac{3}{9} \cdot A + \frac{6}{81} \cdot A$$

Onde $[\frac{3}{9} \cdot A, \frac{6}{81} \cdot A]$ *corresponde a uma PG com primeiro termo* $a_1 = \frac{3}{9} \cdot A$ *e razão* $r = \frac{2}{9}$, *cuja fórmula geral é dada por* $\frac{3}{9} \cdot A \cdot (\frac{2}{9})^n$. *E a área total, em termos de* A, *da região determinada por esse processo seria dada pela equação:*

$$A_{TOTAL} = A + S_n$$

Onde S_n *corresponde a soma dos n primeiros termos de uma PG, cujo primeiro termo é* $a_1 = \frac{3}{9} \cdot A$ *e sua razão* $r = \frac{2}{9}$, *cuja soma dos n primeiros termos seria dada pela equação* $\lim\limits_{n \to \infty_+} S_n = \frac{a_1}{1-r}$ *conforme fora visto anteriormente no cálculo da área da Ilha de Von Koch. Portanto, para PG estudada teríamos o seguinte equacionamento:*

$$\lim_{n \to \infty_+} S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

$$\lim_{n \to \infty_+} S_n = \frac{\frac{3}{9} \cdot A}{1 - \frac{2}{9}}$$

$$\lim_{n \to \infty_+} S_n = \frac{\frac{3}{9} \cdot A}{\frac{9-2}{9}}$$

$$\lim_{n \to \infty_+} S_n = \frac{\frac{3}{9} \cdot A}{\frac{7}{9}}$$

$$\lim_{n \to \infty_+} S_n = \frac{3}{9} \cdot A \cdot \frac{9}{7}$$

$$\lim_{n \to \infty_+} S_n = \frac{3}{7} \cdot A$$

Obtendo o resultado da soma S_n, *podemos então calcular a área total da figura determinada pelo processo em termos de* A.

$$A_{TOTAL} = A + S_n$$

$$A_{TOTAL} = A + \frac{3}{7} \cdot A$$

$$A_{TOTAL} = \frac{7+3}{7} \cdot A$$

$$A_{TOTAL} = \frac{10}{7} \cdot A$$

Resposta: $\frac{10}{7} \cdot A$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Sala Minucci Martins, Ana Maria, Henrique Librantz, André Felipe, A geometria fractal e suas aplicações em arquitetura e urbanismo. Exacta 2006, 4 (novembro-especial). Disponível em: ⟨http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=81009916⟩

[2] FRACTAL E A CULTURA AFRICANA. Disponível em: ⟨https://ograndejardim.wordpress.com/2015/04/01/fractal-e-a-cultura-africana/⟩

[3] Ron Eglash, African Fractals: Modern Computing and Indigenous Design.

[4] Jovem Arquiteto. Ron Eglash e os fractais africanos. Disponível em: ⟨https://ojovemarquiteto.wordpress.com/2010/05/31/ron-eglash-e-os-fractais-africanos/⟩.

[5] CÔRTES, Ivana Resende da Costa. Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, RJ, 2014.